Título:

Una propuesta para fortalecer la enseñanza de los ecuaciones, mediante el cálculo numérico, con la ayuda de Excel.

Eduardo Gabriel Rivel Pizarro.
Universidad de Costa Rica.
gabriel.rivel@ucr.ac.cr

Resumen:

El objetivo de la ponencia es brindar a educadores de secundaria una propuesta que permita hacer el cierre del tema de las ecuaciones empleando métodos numéricos con la ayuda de Excel. En la presentación se hará una explicación geométrica del método de bisección, además se desarrollará la resolución gráfica y numérica de las ecuaciones.

Palabras claves: Métodos numéricos, ecuaciones, propuesta didáctica, cambio de cuadros, transposición didáctica, hojas electrónicas.

Introducción

En Costa Rica se han realizado diversas propuestas metodológicas o, en su defecto, unidades didácticas en el campo de la Enseñanza de la Matemática, a nivel de secundaria. Estos trabajos han sido impulsados por las universidades públicas, por medio de trabajos finales de graduación, congresos[1] y artículos en revistas especializadas.

Las áreas abordadas en dichas propuestas, desde Geometría (Castro y Roldán, 1988) hasta estadística con (Espeleta, 2003) o (Nuñez, 2007). Sin embargo, ninguna ha sido relacionada con la introducción del cálculo numérico (métodos numéricos) y las ecuaciones, a nivel de secundaria.

Por otra parte, los laboratorios de computación de los colegios públicos cuentan con las licencias de programas de la casa Microsoft. Los y las estudiantes del III Ciclo estudian dichos programas, en especial la hoja electrónica “Excel”.

[1] Congreso Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora (CIEMAC) del ITCR, Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de Profesores e investigación en Matemática Educativa, Encuentro de Enseñanza de la Matemática de la UNED, Festival de Matemática.

Marco teórico:

Elementos didácticos

La escuela francesa en los últimos años ha dado grandes aportes, en el campo de la didáctica de la matemática, entre ellos cabe mencionar, la teoría de la transposición didáctica con Ives Chevallard y el cambio de cuadros con Régine Douady.

La transposición didáctica son las modificaciones del saber académico (saber sabio) para ser enseñado en la escuela y comprendido por el estudiante (saber enseñado), es lo que se conoce como transposición didáctica. Como bien lo señala Ruiz (1998, p.21): "*El término transposición didáctica designa el conjunto de transformaciones que sufre un objeto del saber científico con el fin de ser enseñado*".

Sobre el otro concepto, un cuadro (marco) está constituido por objetos de una rama de la matemática, sus relaciones y sus formulaciones. Por ejemplo, el álgebra, la geometría y otros. Para Régine Douady (1995), citado por Lutaif y Zardo (2004) "*Manipular objetos matemáticos en varios contextos o cuadros, como verbal, gráfico y algebraico, puede favorecer el proceso de construcción de conocimiento de esos objetos*".

Los métodos numéricos

El tema de los métodos numéricos no está contenido en el Programa de Matemática del Ministerio de Educación Pública. Sin embargo, es posible establecer una propuesta didáctica para ser desarrollada a nivel de estudios secundarios.

Además, cuenta con una serie de características y ventajas, por ejemplo, requiere del uso de la computadora para ser ejecutada, la resolución de problemas concretos, etc., tal y como lo define Espinoza y Mora (2005). "*Los métodos numéricos consisten, a grandes rasgos, en técnicas para aproximar las soluciones de problemas expresados mediante modelos matemáticos".*

Por otra parte, se debe dar mayor importancia al pensamiento numérico en las y los estudiantes de secundaria. El uso de este tipo de pensamiento es casi nulo. Resultaría beneficioso para ellos ponerlo en práctica en las clases de matemática. Al respecto, Wendland señala: "*...se incrementa otro contexto, el visual, para que el alumno a través del* *medio numérico-algebraico y medio visual-gráfico, eleve los conceptos al nivel de sus conocimientos y ambientado en ese proceso logre construir, comprender y manejar modelos matemáticos*".

Además, es importante hacerle ver al estudiante que en Matemática no todo tiene solución exacta y que, por el contrario, en la mayoría de los casos, la aproximación numérica es la única forma que existe para acercarse al objeto en forma concreta, lo que le permitiría la apropiación del concepto.

¿ Qué son los métodos numéricos?

El Análisis Numérico o Matemática Numérica, es una rama de la Matemática que propone, desarrolla, analiza y aplica algoritmos y métodos numéricos para obtener soluciones aproximadas de problemas matemáticos, con una determinada precisión.

Los algoritmos tienen como objetivo establecer procedimientos métodos de cálculo, que se usan para la solución de un problema aproximarse a ella. Su nombre se debe al matemático árabe Muhammed Mussa, conocido como Al Joarismi. Burden (2002, p 31) define los algoritmos como " *el procedimiento que describe, sin ambigüedades, una serie finita de pasos a realizar en un orden específico*".

Los métodos numéricos son técnicas para aproximar las soluciones de problemas matemáticos, lo más eficientemente posible. Hoy en día, hay una gran diversidad de métodos de aproximación numérica, donde algunos resultan ser más eficientes que otros.

Actualmente, existe un ligamen muy fuerte entre los métodos numéricos y la computación. Según el Informe Technion (Engineering Education 2001), citado por Ruiz, se establece que los avances de la computación inducen a la Matemática a poner un mayor énfasis en los métodos numéricos.

Existen programas computacionales especializados en métodos numéricos, por ejemplo el MatNum. Hay también de Cálculo Simbólico, como por ejemplo Mathematica, Derive, etc., que se usan para tal efecto. En fin, existe una gran gama de programas computacionales, ya sea en C, C++. MaTlab y el Maple son dos programas muy usados actualmente, escritos originalmente en C. Además, en Internet se encuentran métodos numéricos diseñados en Java.

Es importante señalar que la licencia de uso de algunos de estos programas tiene un costo muy elevado, por eso conviene considerar otras opciones, como la hoja electrónica Excel (de Microsoft), aunque no es gratis, sí está en la mayoría de los laboratorios de computación de los colegios del Ministerio de Educación Pública. Por otra parte, hay un dominio relativo de parte de los profesores y estudiantes sobre dicho programa, por ende, vale considerar las posibilidades que puede brindar este programa para desarrollar algunos métodos numéricos. Como lo manifiesta Espinoza (2002), ”... *el Excel se encuentra instalado de forma casi generalizada en las computadoras personales y en los laboratorios de computadoras de la mayoría de instituciones de educación...*”.

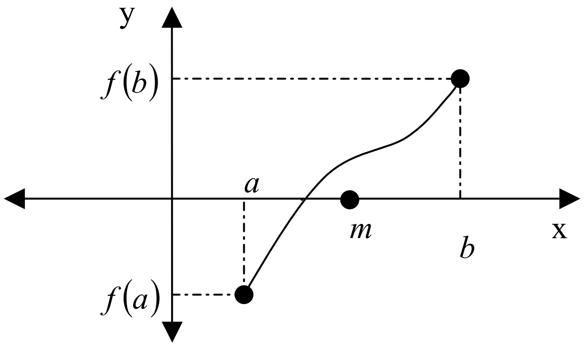
Por otra parte, es valioso tener en cuenta la curva de aprendizaje de programas especializados en el campo de la matemática, en el que se pueden programar los métodos numéricos. Por ejemplo Mathematica, Maple, Matlab, etc. A pesar de que el Programa Excel no cuenta con la herramienta de los métodos numéricos dentro del menú, sigue siendo el programa que mejor se adapta a los estudiantes, por su familiaridad con ellos y con un gran número de profesores. Cabe mencionar a Rasúa (2003) “...*el uso del Excel como herramienta auxiliar en la solución de los problemas mencionados permitiría disminuir el tiempo de familiarización que necesitan los estudiantes cada vez que se enfrentan con un nuevo paquete especializado...*” .

El método de bisección

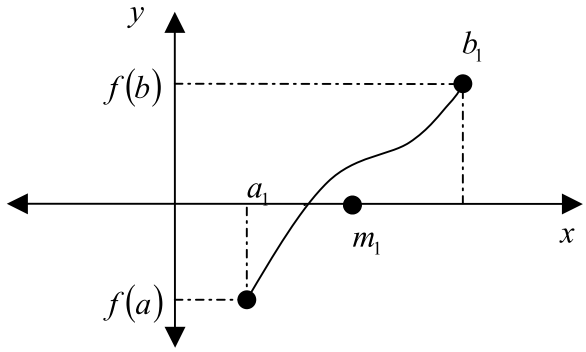
Es uno de los métodos numéricos más elementales para aproximar la solución de ecuaciones de una variable; otros nombres con que se le conoce, son: corte binario, partición de intervalos o de Bolzano. Para aplicar este método, suponga que $f(x)$ es continua en el intervalo $[a,b]$, donde $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos distintos, con lo cual se garantiza que la función necesariamente cortará el eje de las abscisas en un punto del intervalo que será la solución de la ecuación.

A continuación, se brinda una serie de pasos que permiten detallar la técnica de aproximar la solución de una ecuación $f(x)=0$ mediante el método de bisección.

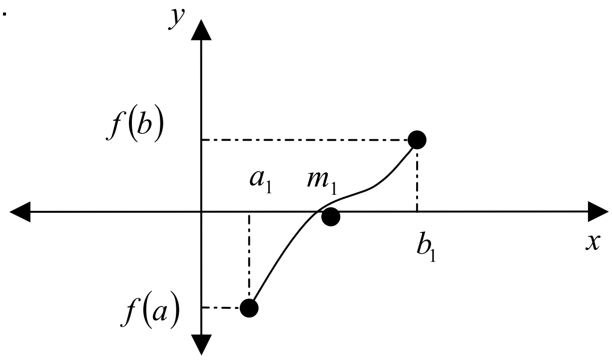
Paso 1 : Establecer el intervalo $[a,b]$ de manera que las imágenes de los extremos a y b sean de signos distintos, en otras palabras, $f(a)\cdot f(b)<0$, y sea m el punto medio de $[a,b]$.



Paso 2: La primera aproximación a la solución es el punto medio m_1 del intervalo $[a_1, b_1]$, donde $a_1 = a$ y $b_1 = b$.



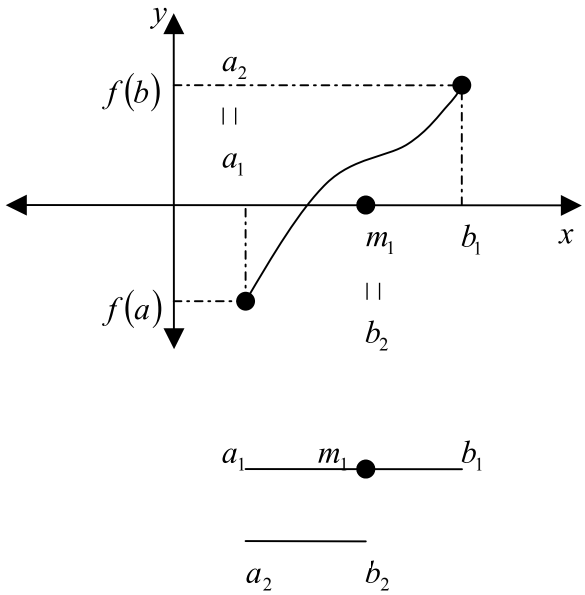
Paso 3: Si la imagen de la aproximación m_1 es cero, entonces se tiene que la solución de la ecuación $f(x)=0$ es m_1 y finaliza el algoritmo.



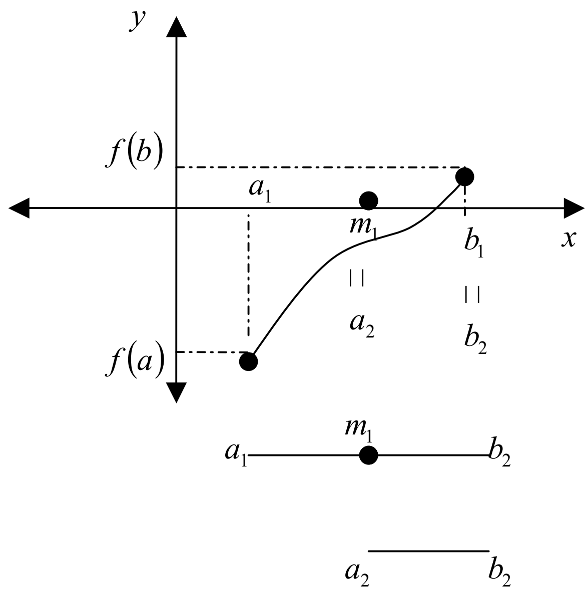
En caso contrario, se pasa a los siguientes pasos.

Paso 4: Si la imagen de la aproximación m_1 es diferente de cero, entonces se escoge un nuevo intervalo. Para determinarlo, hay que considerar dos casos:

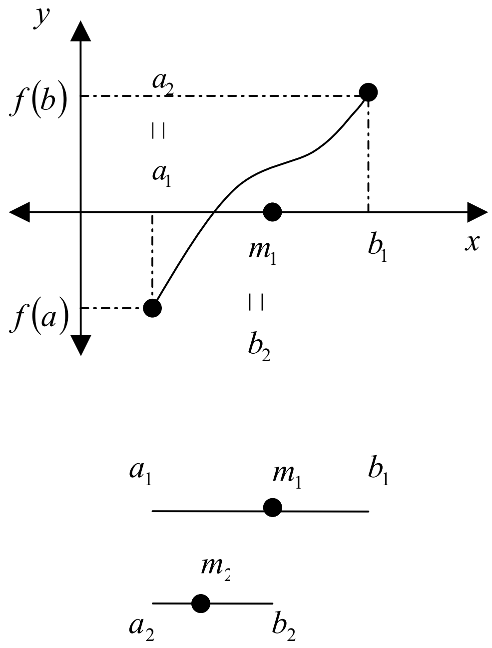
i) Si la imagen del extremo a y la imagen de la aproximación m_1 tienen diferentes signos, entonces el nuevo intervalo será $[a_2, b_2]$, donde $a_2 = a_1$, $b_2 = m_1$.



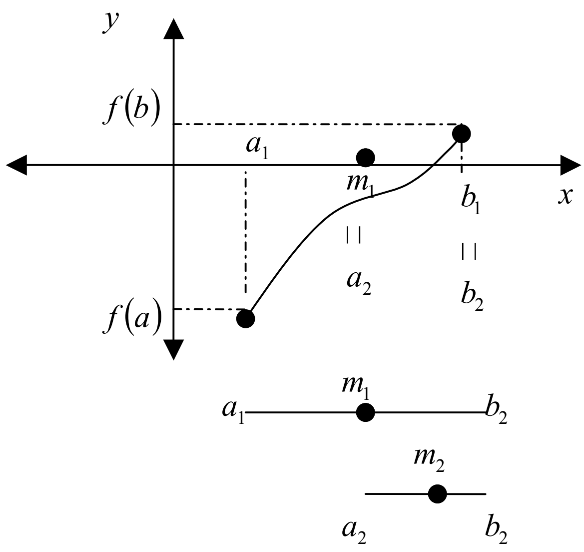
De lo contrario, se escoge $a_2 = m_1$, $b_2 = b_1$.



Paso 5: La nueva aproximación será el punto medio del intervalo obtenido en el paso 4, y se de nota m_2.



Dibujo del caso 4i



Dibujo del caso 4ii

Paso 6: Aplicando los pasos del 3 al 5, se obtiene la solución de la ecuación o una nueva aproximación m_3, y continuando con la aplicación sucesiva de estos pasos, se obtiene la aproximación requerida de la solución de la ecuación.

Las ecuaciones

Las ecuaciones han contribuido solucionar problemas de la vida real. En parte se debe a que muchos de ellos pueden ser modelados mediante ecuaciones que, al resolverlos, se obtienen soluciones para problemas concretos.

Una ecuación es una proposición[2] , formada por una igualdad de dos expresiones en términos de variables y constantes, que podría convertirse en verdadera para ciertos valores de la variable -en cuyo caso esos valores forman el conjunto solución de dicha ecuación-. En el caso de las variables o incógnitas, es común usar las últimas letras del alfabeto: x, y, z. Toda ecuación debe poseer el símbolo que representa la igualdad "=", pero puede tener otros no necesarios; por ejemplo, los que representan las sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, radicales, potencias, etc. Por ejemplo: $2x-5=20$, $(z+1)^2=3x-4z$.

[2] Una proposición es una afirmación que admite un valor de verdad, ya sea verdadero o falso.

Reseña histórica

Diversas culturas hicieron uso de las ecuaciones, primeramente los egipcios con las lineales, con operaciones similares a las de hoy en día. Los babilonios planteaban problemas cuya solución requería de ecuaciones de primero, segundo y hasta tercer grado. Los griegos lo hicieron un nivel mayor de complejidad y con el uso de métodos geométricos. La cultura china desarrolló las ecuaciones cúbicas y se consideran las raíces positivas de las ecuaciones cuadráticas.

En el caso de los hindúes, entre sus aportes cabe mencionar las primeras notaciones algebraicas, los algoritmos de cálculo numérico, y la solución de ecuaciones de segundo grado.

Del siglo IX hay que destacar al árabe Al Joarismi, en el cual se da una de las contribuciones más significativas a la resolución de las ecuaciones de segundo grado mediante la fórmula general, la cual no difiere mucho a la que se conoce hoy en día, $x_i = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ son las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tal que $a \neq 0$. Para ahondar más sobre la fórmula general de Al Joarismi, cabe citar a Barahona,(1992,p.11), "...*consiste en expresar la solución de la ecuación mediante un número finito de operaciones aritméticas y de extracción de raíces sobre los coeficientes de dicha ecuación*".

En el siglo XVI, con Cardano, Fontana (Tartaglia), Del Ferro, Ferrari, se dio un gran impulso a la forma de encontrar soluciones a las ecuaciones de tercer y cuarto grado, empleando los radicales. Como indican Swokowski y Cole (1998,p.50) " *Hacia el siglo XVI, en Italia tuvieron lugar avances importantes para hallar soluciones de ecuaciones, las cuales continuaron en todo el mundo hasta bien entrado el siglo XIX*".

Posteriormente, Lagrange con su obra " Reflexión sobre la resolución algebraica de ecuaciones"; en esta obra de acuerdo con Kline (1994, p.794): " ... *se propuso a sí mismo el objetivo de analizar los métodos de solución de las ecuaciones de tercero y cuarto grado...*".

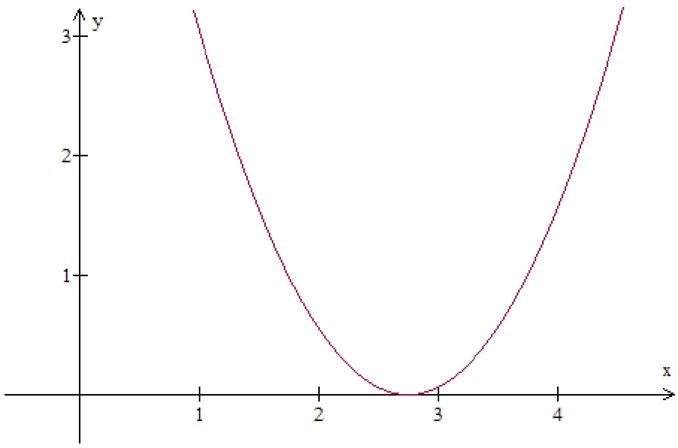
Finalmente con las contribuciones de Cauchy , Abel y Galois, se logra determinar no sólo la imposibilidad de generalizar el método, sino que se establece una nueva teoría de la Matemática, la Teoría de Galois, vigente hasta hoy. Sobre Lagrange, Cauchy, Abel y Galois, Barahona (1992, p. 27) manifiesta que "*... se unen, no solo para demostrar la imposibilidad de generalizar este método para las ecuaciones de grado mayor que cuatro, sino también para iniciar y terminar de desarrollar una de las teorías más fecundas de la matemática de los últimos siglos, la llamada Teoría de Galois*".

Propuesta para fortalecer la enseñanza de los ecuaciones

Se pretende que el estudiante pueda visualizar la solución de una ecuación, no solo desde el punto de vista algebraico, sino además, geométrico (plano cartesiano) y numérico, mediante el uso de una hoja electrónica de cálculo, de Microsoft, EXCEL.

Problema N°1.

Se tiene la siguiente gráfica de una función de la que se desconoce su criterio.



De la curva, se observa que la raíz se encuentra entre los valores de dos y tres, entonces posibles aproximaciones a la solución son por ejemplo 2,5; 2,6; 2,7.

Si la raíz o la solución es 2,75; en la primera aproximación 2,5; el error sería 0,25. En la segunda aproximación 2,6; el error es de 0,15 y consecuentemente, el error disminuyó, pero la mejor aproximación de las tres es 2,7; ya que el error es de 0,05.

Otro concepto asociado al ejemplo anterior, es el error máximo. Si la solución de la ecuación y la aproximación están en el intervalo cuyos extremos son 2,7 y 2,9, ¿ cuál es el máximo valor del error?. En este caso el error máximo es 2,9 – 2,7= 0,2; pues un extremo del intervalo puede ser la solución y el otro extremo, la aproximación.

Este ejemplo introduce las siguientes definiciones:

Error de la aproximación es la distancia entre la aproximación y el valor exacto (solución de la ecuación).

Error máximo de la aproximación es el mayor valor que puede alcanzar, si se desconoce la solución de la ecuación.

Problema N°2.

Un profesor escribe en la pizarra lo siguiente: "Dos pueblos A y B se encuentran a 20 kilómetros de distancia. Organizan una competencia de atletismo, donde los del pueblo A corren hacia el pueblo B y los del pueblo B hacia el pueblo A. Se requiere ubicar una ambulancia en caso de una emergencia."

a) ¿En qué lugar del trayecto, debe estar la ambulancia, para que esté más cerca de un posible accidente de un competidor(a)?

Ante una situación de ésas, se espera que un(a) estudiante conteste que la ambulancia se debe colocarse exactamente en el centro de la distancia de los dos pueblos, o sea a 10 kilómetros de A y a 10 kilómetros de B.

Se gesta una nueva pregunta, por algún miembro de la clase (inclusive el profesor), ¿cómo se determina el centro de una distancia desde el punto de vista de matemática?

Los estudiantes deben tomar el punto medio de la distancia recorrida entre los pueblos que sería un intervalo, o sea 0 y 20 cuyo promedio sería 10 y explicar por qué 10 es la respuesta al problema planteado.

b) Suponiendo que la ambulancia está en la mitad del trayecto de la competencia y ocurre un accidente, ¿cuál es la distancia máxima que debe recorrer la ambulancia para llegar al lugar del accidente? Se espera que una persona de la clase conteste el promedio.

Si ocurre un accidente, se tiene que:

1. La ambulancia se ubica en el punto medio del trayecto, este es una aproximación al punto donde ocurre un accidente.

2. La distancia que recorre la ambulancia para llegar al punto del accidente, es el error cometido entre el punto donde se ubicó la ambulancia y el punto donde ocurre el accidente. El error máximo es la mitad del trayecto.

El ejemplo anterior nos permite llegar a la siguiente conclusión:

Si una ecuación tiene una solución en el intervalo $[a,b]$, una aproximación a la solución es $\frac{a+b}{2}$, esta aproximación comete un error máximo de $\frac{b-a}{2}$. Es importante hacer notar que cualquier otra aproximación produce un error máximo mayor.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

Resolución gráfica:

Para determinar la solución de una ecuación usando la resolución gráfica, se requiere en primer lugar, trasladar dicha ecuación a notación funcional, por ejemplo, para determinar las soluciones de la ecuación $2x^2 - x - 2 = 0$ es equivalente a determinar las intersecciones de la función $f(x) = 2x^2 - x - 2$ con el eje (x). La notación $f(x) = 0$ se denomina la notación funcional de la ecuación.

Luego se traza la curva de la función en un plano cartesiano. Se debe indicar a los estudiantes de que las soluciones de la ecuación serían los valores de x de los pares ordenados que intersecan la curva con el eje de las abscisas (x).

Existen programas computacionales que permiten graficar funciones de una forma rápida y fácil, como Excel, Winplot, Mathematica, Derive, Maple, etc. Tienen la ventaja de que permiten seleccionar con el "cursor" el par ordenado, donde se corta la curva con el eje (x) aproximadamente, y se muestra el valor aproximado de la solución en notación decimal, en caso de que no sea entera, la cual aunque no es exacta, sí es una buena aproximación de la solución.

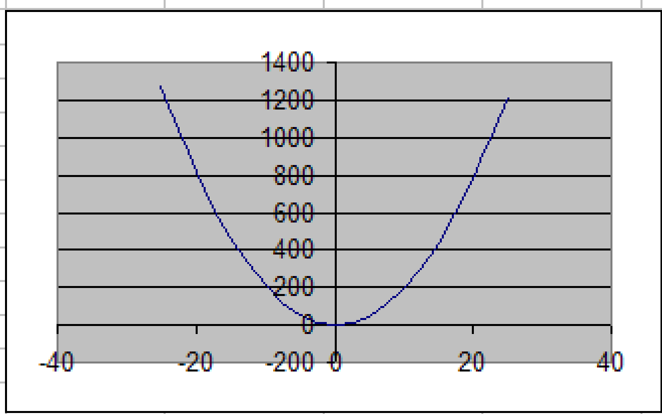
A modo de ejemplo, se detallará cómo encontrar aproximaciones a las soluciones de la ecuación $2x^2 - x - 2 = 0$, mediante los programas Excel y Winplot.

Para graficar la función $f(x)=2x^2-x-2$ con Excel, existen varias formas, una manera muy particular es creando una tabla de valores. Primero debe abrirse un documento en blanco, y puede escribir la función en el primer reglón. Luego, se escribe en la celda A3 "x" y en la celda B3 "$f(x)$", y se construye una serie descendente de 5 en 5 desde -25 hasta 25 en la columna A, a partir de la celda A4. Posteriormente, se posiciona en la celda B4 y se escribe **=2*POTENCIA(A4;2)- A4-2**, y luego se copia esta celda hacia abajo, con lo que se obtienen automáticamente, las imágenes correspondientes de cada uno de los valores de la columna B.

Para obtener la curva, hay que seleccionar las preimágenes e imágenes y se pulsa el icono del menú "*Asistente para gráficos*", aparece una plantilla, se escoge XY Dispersión, e inmediatamente aparece otra plantilla, en la cual debe escogerse "*dispersión con línea suavizada y sin marcadores de datos*"; luego se siguen las instrucciones; si se escoge "*siguiente*" tres veces y "*finalizar*", se obtiene lo siguiente:

x	$f(x)$
-25	1273
-20	818
-15	463
-10	208
-5	53
0	-2
5	43
10	188
15	433
20	778
25	1223

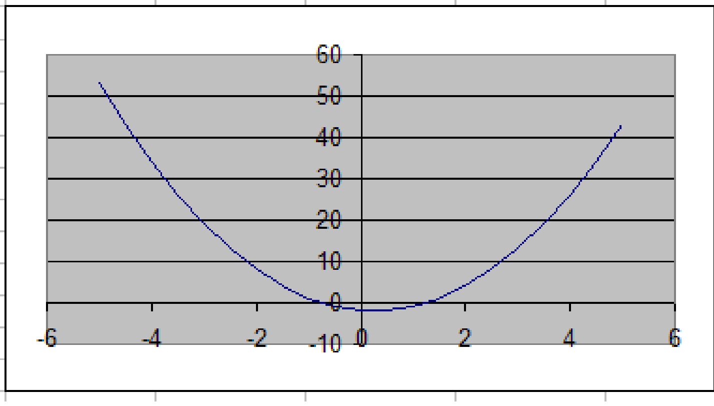
$f(x) = 2x^2 - x - 2$



De la curva obtenida anteriormente, se observa que las raíces se encuentran dentro un intervalo más pequeño, por lo cual convendría graficarla de nuevo, desde -5 hasta 5 y se obtiene:

$$f(x) = 2x^2 - x - 2$$

x	$f(x)$
-5	53
-4	34
-3	19
-2	8
-1	1
0	-2
1	-1
2	4
3	13
4	26
5	43

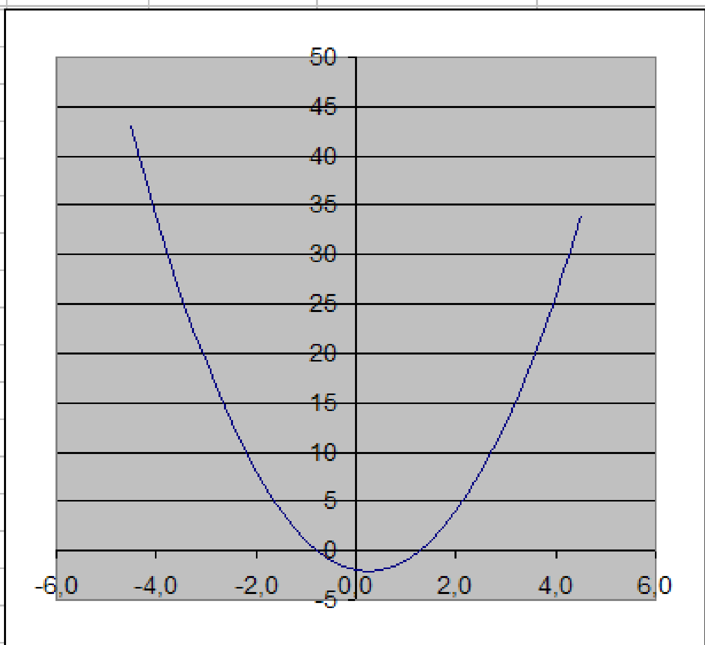


Para cambiar el intervalo de graficación, basta con modificar los valores de las abscisas hasta lograr que se aprecien las intersecciones de la curva con el eje de las abscisas.

Hay otras formas de graficar funciones mediante Excel, una de ellas es usando macros. Un macro es una serie de pasos que se almacenan y se pueden activar con alguna tecla. Por ello que se programó en Excel que permite graficar en una forma más sencilla, (archivo grafica.xls), al abrirlo aparece una ventana en la que debe seleccionar "habilitar macros" y posteriormente aparece la hoja electrónica, que se detalla a continuación:

e(x)= 2x^2-x-2 Ejecutar

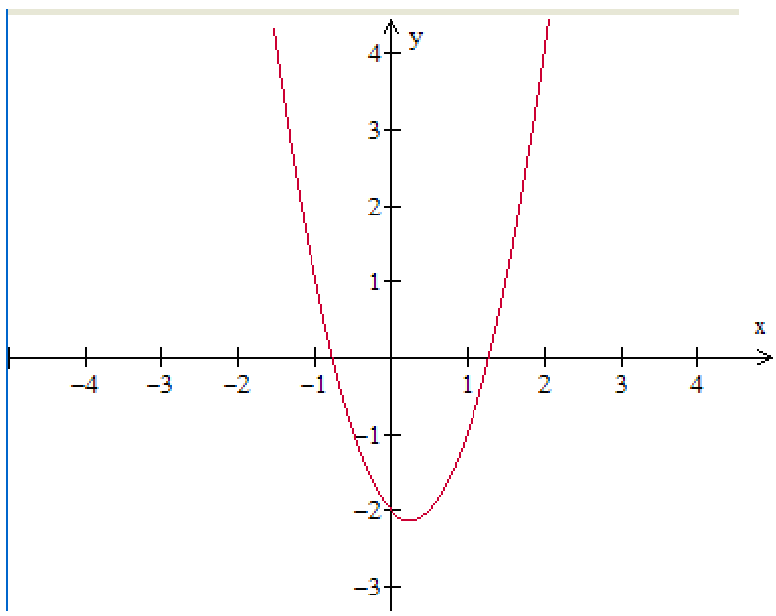
Intervalo	
[a ,	b]
-5,0	5,00
-4,5	43
-4,0	34
-3,5	26
-3,0	19
-2,5	13
-2,0	8
-1,5	4
-1,0	1
-0,5	-1
0	-2
0,5	-2
1,0	-1
1,5	1
2,0	4
2,5	8
3,0	13
3,5	19



En la celda E3 se digita la función que se desea graficar – nótese que no se está usando f(x) o g(x), para que no exista un conflicto en la programación del macro de Excel-. Si se desea cambiar el criterio de la función, es necesario después de escribir la nueva función, dar “enter” (intro) una vez y luego oprimir una vez el botón de ejecutar que se ubica en la celda E3. Con ello, se obtiene la curva de la función en el intervalo definido en las celdas B8 y C8.

Existen programas s que permiten graficar funciones en una forma sencilla como el Winplot, es de uso libre y fue elaborado por Richard Parris del Phillips Exeter Academy; éste se puede bajar de la página de Internet: http://math.exeter.edu/rparris. A diferencia de Excel, es un programa diseñado para graficar funciones, por lo que no es necesario modificar el intervalo de graficación.

Si se desea graficar la función $f(x)=x^2-5x+6$ usando WinPlot, primero se debe abrir el ejecutable, aparece una pantalla de la cual se marca la opción “Window”, automáticamente, se despliega un nuevo menú, en el que se escoge la opción “2-dim”, y aparecerá una nueva pantalla con un plano cartesiano. Luego se selecciona “explicit...” de la opción “equation” en el menú y posteriormente, aparece un recuadro con título “ $y=f(x)$ ” en el que se digita el criterio de la función en la celda $f(x)$ y por último al marcar “ok”, aparece la curva.



El programa Winplot tiene la cualidad de que si se posesiona en algún punto del plano cartesiano, éste automáticamente, brinda el par ordenado aproximado correspondiente a dicho punto. Debido a eso, se pueden seleccionar los puntos que intersecan la curva con el eje (x) y determinar el valor aproximado correspondiente.

Por el método de la resolución gráfica, en general, se obtienen aproximaciones a las soluciones de la ecuación.

Resolución numérica:

Otra forma de resolver las ecuaciones es mediante métodos de aproximación numérica; tienen la ventaja de que permiten resolver ecuaciones polinómicas de diversos grados y otras ecuaciones más complejas.

Para llevar a cabo el método de bisección, se recurrirá al archivo adjunto de Excel bisección.xls. Dado que este archivo contiene un macro, debe seleccionarse su habilitación, para poder acceder a él. Una vez abierto el documento, aparecerá la hoja electrónica, que se detalla a continuación:

	MÉTODO DE BISECCIÓN						
						Error aceptado:	0,00001
	e(x)=	2x^2-x-2	Ejecutar			Máx. aproximaciones	3
Nº Apro-	Intervalo		Aproximación	Imagen del intervalo		Imagen de la Ap.	Error Máximo
ximación	[a ,	b]	(a+b)/2	e (a)	e (b)	e ((a+b)/2)	(b-a)/2
1	1,0000	3,0000	2,00000	-1,00000	13,00000	4,00000	1,00000
2	1,0000	2,0000	1,50000	-1,00000	4,00000	1,00000	0,50000
3	1,0000	1,5000	1,25000	-1,00000	1,00000	-0,12500	0,25000
4							

Seguidamente, se establece una breve explicación de los componentes que conforman dicha hoja electrónica.

A. Los elementos que se pueden modificar.

- La función e(x) en la celda D3, en este caso $e(x) = 2x^2 - x - 2$, recuerde que no se usa f(x) o g(x), para evitar conflictos con la programación del macro de Excel. Si se desea cambiar el criterio de la función, es necesario después de escribir la nueva función, dar "enter" (intro) una vez y luego seleccionar una vez el botón de ejecutar que se ubica en la celda E3.
- El error aceptado en la celda H2 puede ser modificado y con él se pretende establecer qué tan exacto se quiere que trabaje el método; en otras palabras, entre más pequeño

sea el error aceptado, hay un mayor número de aproximaciones y la aproximación final será mejor. Si se desea cambiar el error aceptado, es necesario después de escribir el nuevo error, dar "*enter*" (*intro*) una vez.

- El máximo de aproximaciones definida en la celda H3, al igual que el anterior, puede ser modificado; dicho número dependerá de cada ecuación, pues existen algunas que requieren de muchas aproximaciones para obtener una buena aproximación de la solución.
- El intervalo cuyos extremos son a y b, es el intervalo inicial corresponde a las celdas B8 y C8.

B. Los elementos que el programa modifica por su propia cuenta.

- El Nº de aproximaciones corresponde al número de aproximaciones o veces que se ha aplicado el algoritmo del método de bisección. Esta se ubica en la columna A y se debe tener cuidado de no confundir su numeración con la de las filas de la hoja electrónica, por ejemplo la iteración número 5, está ubicada en la fila 12. El Nº de aproximaciones dependerá de la ecuación, y lo que digitó el usuario en el error aceptado y en el máximo de aproximaciones.
- La aproximación es el promedio de los extremos del intervalo. Para el intervalo inicial, se encuentra en la celda D8.
- La imagen del intervalo. Para el intervalo inicial, éste se ubica en las celdas E8 y F8, respectivamente. Debe cumplirse que dichas imágenes sean de signos distintos, si no debe escogerse otro intervalo inicial que cumpla dicha condición.
- La imagen de la aproximación, en esta columna se tiene la imagen de la aproximación, en el caso de la imagen de la primera aproximación se ubica en la celda G8.
- El error máximo indica el error máximo de la aproximación (mitad de la diferencia entre los extremos de cada intervalo, para el error máximo inicial se encuentra en la celda H8.

Por otra parte, el cuadro siguiente admite una explicación geométrica.

MÉTODO DE BISECCIÓN

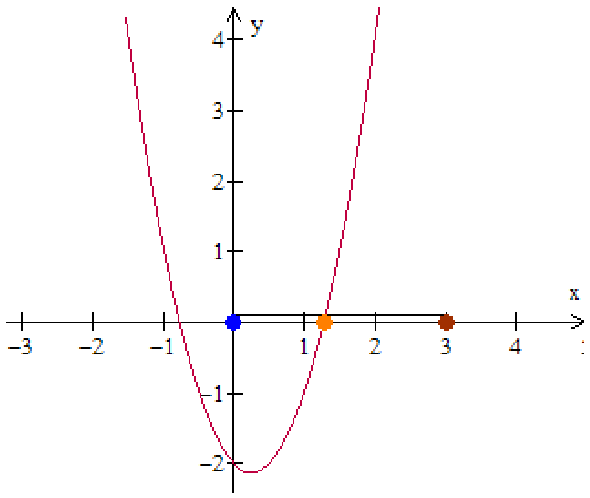
e(x)= 2x^2-x-2 | Ejecutar

Error aceptado: 0,00001

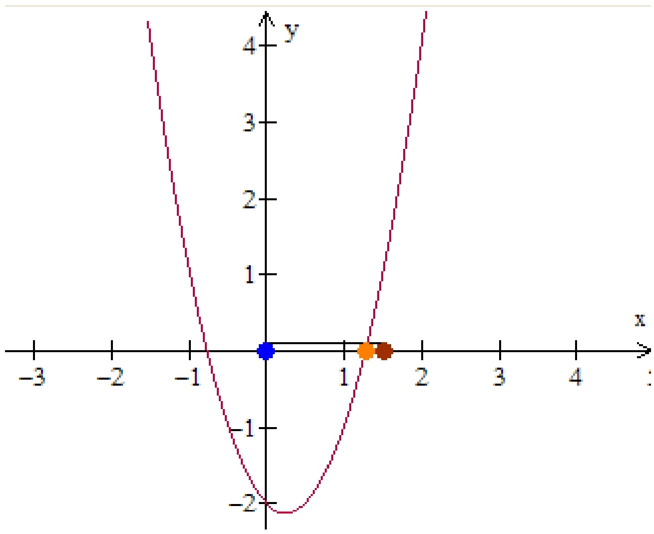
Máx. aproximaciones 3

Nº Apro-ximación	Intervalo [a	b]	Aproximación (a+b)/2	Imagen del intervalo e (a)	e (b)	Imagen de la Ap. e((a+b)/2)	Error Máximo (b-a)/2
1	0,0000	3,0000	1,50000	-2,00000	13,00000	1,00000	1,50000
2	0,0000	1,5000	0,75000	-2,00000	1,00000	-1,62500	0,75000
3	0,7500	1,5000	1,12500	-1,62500	1,00000	-0,59375	0,37500
4							

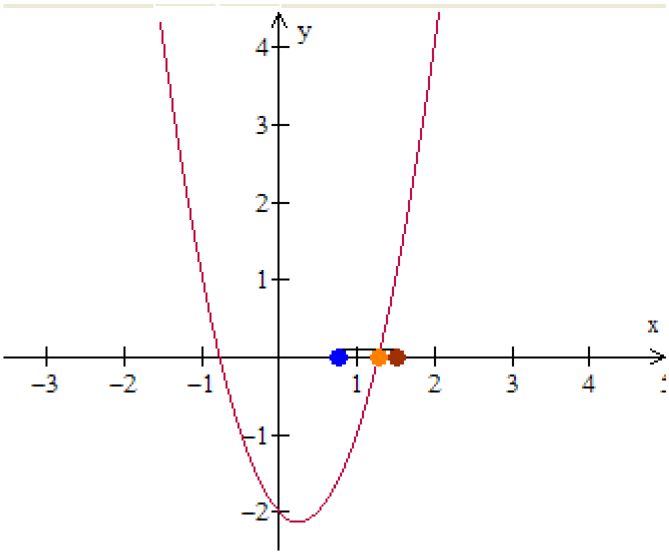
Como se aprecia en la gráfica, la imagen de 0 es negativa y la de 3 es positiva, por lo que una solución de la ecuación está dentro del intervalo $[0,3]$. La aproximación Nº1 es $1{,}5$ y el error máximo de la primera aproximación es $1{,}5$.



Del gráfico se puede notar que la imagen de 1,5 (la primera aproximación) no es la raíz de la ecuación, por lo que pasa a ser un extremo del nuevo intervalo, y dado que la imagen de 0 es negativa, la de 1,5 es positiva, entonces el nuevo intervalo sería $\left[0,\frac{3}{2}\right]$.



Dado que la segunda aproximación es 0,75 y su imagen es negativa y la de $\frac{3}{2}$ es positiva. Aparte de que el intervalo contiene a la raíz, el error máximo se reduce nuevamente en la mitad del anterior.



Retomando la ecuación $-6 = x^2 - 5x$, para resolverla mediante aproximación numérica con el método de bisección, se requiere de su expresión equivalente en notación de función, donde $f(x) = x^2 - 5x + 6$ y escoger un intervalo inicial de forma tal que sus extremos tengan imágenes de signos distintos. Otro requisito para aplicar el método de bisección es que la función sea continua; sin embargo, recuérdese que toda función polinomial es continua, esto permite no abordar el concepto de continuidad por ahora.

En el ejemplo se pueden tomar como valores iniciales a 1 y $\frac{5}{2}$ dado que sus imágenes son de signos opuestos. Para ejecutar el método, primero se debe verificar que la función por implementar en la hoja de cálculo sea la correspondiente, por ejemplo, la función $e(x) = x^2 - 5x + 6$, debe aparecer en la celda E3, x^$2-5x+6$. A pesar de que el documento tiene el macro que permite automáticamente ejecutar la función cuando se invoca, conviene verificar que efectivamente lo hace, basta con posicionar el cursor en las celdas E8, F8 y G8 y deberá aparecer en la parte superior de la pantalla, **=SI(B8="";"";e(B8))**, con lo que se muestra que sí está invocando a la función $e(x)$.

Posteriormente, se escriben los valores iniciales en a y b, en este caso 1 y $\frac{5}{2}$ respectivamente, con ello se ejecuta el programa. Es importante insistir en que las imágenes de los extremos del intervalo inicial respectivas sean de signos distintos. En caso de no lograrse esto último, deben buscarse otros valores iniciales que cumplan dicha condición.

El usuario puede cambiar el error aceptado, en cuyo caso, se debe tener presente que cuanto más pequeño sea éste, hay más posibilidades de que se requiera de un mayor número de aproximaciones, ya que el programa deja de calcular aproximaciones hasta que el error máximo, sea menor que el error aceptado. Para evitar que el programa realice demasiadas aproximaciones debido al error aceptado, el usuario puede fijar el número máximo de aproximaciones. El programa pararía al llegar a dicho número, sin importar si el error máximo es mayor que el aceptado.

En este caso, se programó la hoja electrónica según cuando se presente alguno de los dos parámetros, el que ocurra de primero, ya sea cuando el error máximo sea menor que el error aceptado o cuando se cumpla el número de aproximaciones establecido.

Si para la función $e(x) = x^2 - 5x + 6$, se establece un error máximo de 0,001 y un número máximo de aproximaciones de 20, se obtiene:

MÉTODO DE BISECCIÓN

e(x)= x^2-5x+6 Ejecutar

Error aceptado: 0,001

Máx. aproximaciones 20

Nº Aproximación	Intervalo [a	b]	Aproximación (a+b)/2	Imagen del intervalo e(a)	e(b)	Imagen de la Ap. e((a+b)/2)	Error Máximo (b-a)/2
1	1,0000	2,5000	1,75000	2,00000	-0,25000	0,31250	0,75000
2	1,7500	2,5000	2,12500	0,31250	-0,25000	-0,10938	0,37500
3	1,7500	2,1250	1,93750	0,31250	-0,10938	0,06641	0,18750
4	1,9375	2,1250	2,03125	0,06641	-0,10938	-0,03027	0,09375
5	1,9375	2,0313	1,98438	0,06641	-0,03027	0,01587	0,04688
6	1,9844	2,0313	2,00781	0,01587	-0,03027	-0,00775	0,02344
7	1,9844	2,0078	1,99609	0,01587	-0,00775	0,00392	0,01172
8	1,9961	2,0078	2,00195	0,00392	-0,00775	-0,00195	0,00586
9	1,9961	2,0020	1,99902	0,00392	-0,00195	0,00098	0,00293
10	1,9990	2,0020	2,00049	0,00098	-0,00195	-0,00049	0,00146
11	1,9990	2,0005	1,99976	0,00098	-0,00049	0,00024	0,00073
12							

La tabla anterior permite dar una explicación - no geométrica - de cómo funciona el método de bisección. En la iteración Nº1 se tiene que los valores iniciales son 1 y $\frac{5}{2}$ y sus imágenes son respectivamente 2 y -0,25 (cumple la condición de signos opuestos); la primera aproximación es 1,75 y su imagen es 0,3125; el error máximo de la aproximación es de 0,75.

En la aproximación Nº2, el método escoge automáticamente el nuevo intervalo, en un extremo, la aproximación obtenida en la aproximaciones anterior y el otro repite el extremo

b del anterior, donde sus imágenes son de signos opuestos y la nueva aproximación es 2,125 con un error máximo de 0,375. En la aproximación Nº3, el nuevo intervalo tiene como extremos: el a del intervalo anterior y el otro extremo es aproximación del intervalo anterior, y el método continúa así sucesivamente.

A pesar de que se estableció a 20 como número máximo de aproximaciones, el programa paró en la aproximaciones 12, dado que en ésta, el error máximo es de 0,00073 que es menor que el error aceptado (0,001). Así se puede asegurar que la aproximación 2,00012 está a menos de una milésima de la solución de la ecuación.

Para encontrar la segunda raíz, se requiere de un proceso similar, basta con probar con diferentes valores, que cumplan las condiciones anteriormente citadas. Si se toma como nuevos valores iniciales a $\frac{5}{2}$ y 4, y si se modifica el error aceptado por uno más pequeño -pasando de 0,001 a 0,00001-, el programa realiza más pasos. En este caso, se modificó el máximo de aproximaciones a 15 y el programa paró en dicho número y se obtuvo lo siguiente:

MÉTODO DE BISECCIÓN

e(x)= x^2-5x+6 Ejecutar

Error aceptado: 0,00001

Máx. aproximaciones 15

Nº Apro-ximación	Intervalo [a	, b]	Aproximación (a+b)/2	Imagen del intervalo e (a)	e (b)	Imagen de la Ap. e ((a+b)/2)	Error Máximo (b-a)/2
1	2,5000	4,0000	3,25000	-0,25000	2,00000	0,31250	0,75000
2	2,5000	3,2500	2,87500	-0,25000	0,31250	-0,10938	0,37500
3	2,8750	3,2500	3,06250	-0,10938	0,31250	0,06641	0,18750
4	2,8750	3,0625	2,96875	-0,10938	0,06641	-0,03027	0,09375
5	2,9688	3,0625	3,01563	-0,03027	0,06641	0,01587	0,04688
6	2,9688	3,0156	2,99219	-0,03027	0,01587	-0,00775	0,02344
7	2,9922	3,0156	3,00391	-0,00775	0,01587	0,00392	0,01172
8	2,9922	3,0039	2,99805	-0,00775	0,00392	-0,00195	0,00586
9	2,9980	3,0039	3,00098	-0,00195	0,00392	0,00098	0,00293
10	2,9980	3,0010	2,99951	-0,00195	0,00098	-0,00049	0,00146
11	2,9995	3,0010	3,00024	-0,00049	0,00098	0,00024	0,00073
12	2,9995	3,0002	2,99988	-0,00049	0,00024	-0,00012	0,00037
13	2,99988	3,00024	3,00006	-0,00012	0,00024	0,00006	0,00018
14	2,99988	3,00006	2,99997	-0,00012	0,00006	-0,00003	0,00009
15	2,99997	3,00006	3,00002	-0,00003	0,00006	0,00002	0,00005
16							

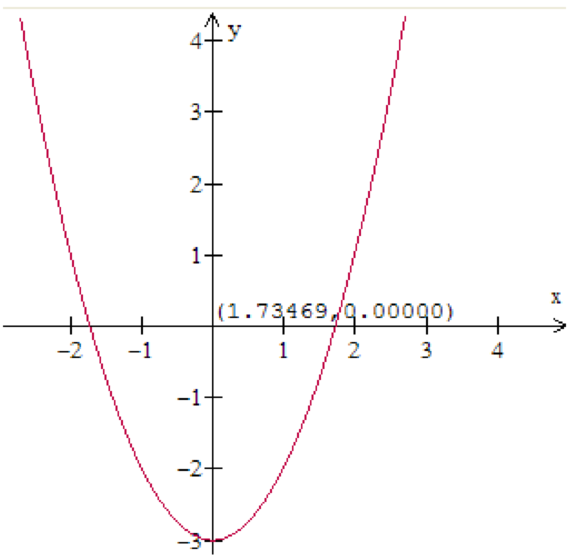
Al variar el error aceptado a uno más pequeño, y al establecer un número mayor de aproximaciones, el método para en la aproximación Nº 15: 3,00002. En este caso, no se puede asegurar que el error es menor que 0,00001. Sin embargo, el error es menor o igual que 0,00005.

Es posible que se presenten diferentes situaciones como por ejemplo, que solo aparece una aproximación, en cuyo caso conviene verificar si las imágenes de los valores iniciales, respectivas, sean de signos distintos. En el caso de dos o tres aproximaciones, esto se puede dar, porque el método encontró muy rápido la raíz -pues los valores iniciales son muy cercanos-, o que el error aceptado es muy grande, o bien que el número máximo de aproximaciones es muy pequeño. Se aprovechó el ejemplo para ilustrar la interpretación del error máximo y el error aceptado en la tabla, sin embargo, el lector puede hallar el valor del error exacto, pues las raíces son exactas.

A continuación, se detallarán algunos ejemplos que permitan al estudiante, lograr el objetivo previamente establecido.

A. Resolver la ecuación $x^2 - 3 = 0$, de forma algebraica, gráfica y numéricamente.

Si se resuelve la ecuación por métodos algebraicos, se tiene que las raíces son $x = -\sqrt{3}$ y $x = \sqrt{3}$. Si se emplea calculadora para tal efecto, la mayoría de ellas no da su respuesta en notación de radicales, sino aproximaciones de la solución, en este caso sería $-1{,}73205080...$ y $1{,}73205080...$ Para la resolución gráfica, si se usa el programa Winplot para graficar la función $f(x) = x^2 - 3$ se obtiene lo siguiente:



En dicha gráfica se puso el puntero del cursor en una de las intersecciones de la curva con el eje (x); automáticamente, el programa brinda el par ordenado correspondiente a dicho punto, (1.73469, 0), -Winplot usa el punto en lugar de la coma decimal-, en otras palabras, una aproximación de la raíz positiva es 1,73469. Si se realiza la misma acción, pero en la otra intersección, se tiene que la raíz negativa es -1,73469.

¿Se podrá encontrar una mejor aproximación mediante resolución numérica? Para contestar esta pregunta es necesario correr el archivo de Excel, que se tiene para tal efecto. Además, como se sabe que una solución está entre 1 y 2, entonces se podrían tomar estos como valores iniciales.

		MÉTODO DE BISECCIÓN					
						Error aceptado:	0,0001
	e(x)=	x^2-3	Ejecutar			Máx. aproximaciones	15
Nº Apro-	Intervalo		Aproximación	Imagen del intervalo		Imagen de la Ap.	Error Máximo
ximación	[a ,	b]	(a+b)/2	e (a)	e (b)	e ((a+b)/2)	(b-a)/2
1	1,0000	2,0000	1,50000	-2,00000	1,00000	-0,75000	0,50000
2	1,5000	2,0000	1,75000	-0,75000	1,00000	0,06250	0,25000
3	1,5000	1,7500	1,62500	-0,75000	0,06250	-0,35938	0,12500
4	1,6250	1,7500	1,68750	-0,35938	0,06250	-0,15234	0,06250
5	1,6875	1,7500	1,71875	-0,15234	0,06250	-0,04590	0,03125
6	1,7188	1,7500	1,73438	-0,04590	0,06250	0,00806	0,01563
7	1,7188	1,7344	1,72656	-0,04590	0,00806	-0,01898	0,00781
8	1,7266	1,7344	1,73047	-0,01898	0,00806	-0,00548	0,00391
9	1,7305	1,7344	1,73242	-0,00548	0,00806	0,00129	0,00195
10	1,7305	1,7324	1,73145	-0,00548	0,00129	-0,00210	0,00098
11	1,7314	1,7324	1,73193	-0,00210	0,00129	-0,00041	0,00049
12	1,7319	1,7324	1,73218	-0,00041	0,00129	0,00044	0,00024
13	1,7319	1,7322	1,73206	-0,00041	0,00044	0,00002	0,00012
14	1,7319	1,7321	1,73199	-0,00041	0,00002	-0,00019	0,00006
15							

Con un error aceptado de 0,0001, y un máximo de aproximaciones de 14, la mejor aproximación que se obtiene es de 1,73199 que mejora a la obtenida mediante el trazado de gráficas. Esta aproximación está a menos de una diezmilésima de la solución, pues el error máximo 0,00006 es menor a 0,0001. Si se ejecuta de nuevo el programa, pero con valores iniciales -1 y -2, se obtiene la aproximación de la otra raíz, como se muestra a continuación:

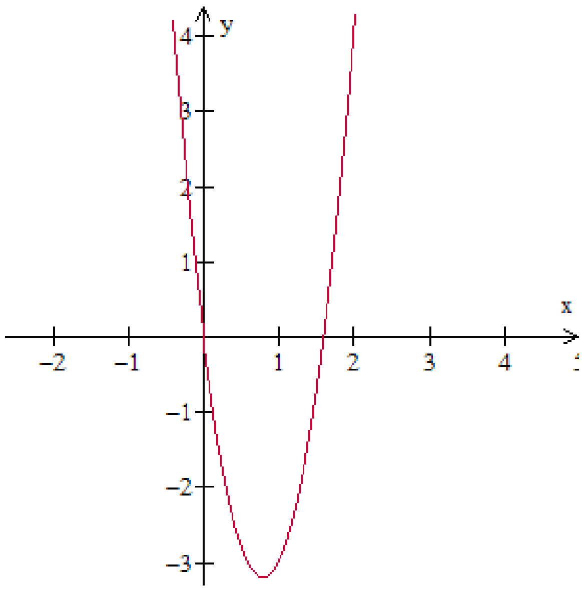
	e(x)=	x^2-3	Ejecutar	Error aceptado:	0,00001
				Máx. aproximaciones	16

Nº Apro-ximación	Intervalo [a	, b]	Aproximación (a+b)/2	Imagen del intervalo e (a)	e (b)	Imagen de la Ap. e ((a+b)/2)	Error Máximo (b-a)/2
1	-2,0000	1,0000	-0,50000	1,00000	-2,00000	-2,75000	1,50000
2	-2,0000	-0,5000	-1,25000	1,00000	-2,75000	-1,43750	0,75000
3	-2,0000	-1,2500	-1,62500	1,00000	-1,43750	-0,35938	0,37500
4	-2,0000	-1,6250	-1,81250	1,00000	-0,35938	0,28516	0,18750
5	-1,8125	-1,6250	-1,71875	0,28516	-0,35938	-0,04590	0,09375
6	-1,8125	-1,7188	-1,76563	0,28516	-0,04590	0,11743	0,04688
7	-1,7656	-1,7188	-1,74219	0,11743	-0,04590	0,03522	0,02344
8	-1,7422	-1,7188	-1,73047	0,03522	-0,04590	-0,00548	0,01172
9	-1,7422	-1,7305	-1,73633	0,03522	-0,00548	0,01484	0,00586
10	-1,7363	-1,7305	-1,73340	0,01484	-0,00548	0,00467	0,00293
11	-1,7334	-1,7305	-1,73193	0,00467	-0,00548	-0,00041	0,00146
12	-1,7334	-1,7319	-1,73267	0,00467	-0,00041	0,00213	0,00073
13	-1,7327	-1,7319	-1,73230	0,00213	-0,00041	0,00086	0,00037
14	-1,7323	-1,7319	-1,73212	0,00086	-0,00041	0,00023	0,00018
15	-1,7321	-1,7319	-1,73203	0,00023	-0,00041	-0,00009	0,00009
16	-1,7321	-1,7320	-1,73207	0,00023	-0,00009	0,00007	0,00005
17							

En este caso, si el error aceptado es 0,00001 y el máximo de aproximaciones es 16, el programa se detiene hasta la aproximación Nº16, ya que para esta aproximación, no se ha logrado que el error máximo sea menor que el error aceptado 0,00009.

B. Determine las soluciones de la ecuación $5x^2 = 8x$.

Gráfica:



.

Numérica:

El que cero sea una raíz de la ecuación se puede redescubrir mediante la resolución numérica. Basta con tomar a -2 y a $\frac{3}{2}$ como valores iniciales en el método de la bisección.

MÉTODO DE BISECCIÓN

Error aceptado: 0,0001

e(x)= 5x^2-8x Ejecutar

Máx. aproximaciones 15

Nº Aproximación	Intervalo [a	b]	Aproximación (a+b)/2	Imagen del intervalo e(a)	e(b)	Imagen de la Ap. e((a+b)/2)	Error Máximo (b-a)/2
1	-2,0000	1,5000	-0,25000	36,00000	-0,75000	2,31250	1,75000
2	-0,2500	1,5000	0,62500	2,31250	-0,75000	-3,04688	0,87500
3	-0,2500	0,6250	0,18750	2,31250	-3,04688	-1,32422	0,43750
4	-0,2500	0,1875	-0,03125	2,31250	-1,32422	0,25488	0,21875
5	-0,0313	0,1875	0,07813	0,25488	-1,32422	-0,59448	0,10938
6	-0,0313	0,0781	0,02344	0,25488	-0,59448	-0,18475	0,05469
7	-0,0313	0,0234	-0,00391	0,25488	-0,18475	0,03133	0,02734
8	-0,0039	0,0234	0,00977	0,03133	-0,18475	-0,07765	0,01367
9	-0,0039	0,0098	0,00293	0,03133	-0,07765	-0,02339	0,00684
10	-0,0039	0,0029	-0,00049	0,03133	-0,02339	0,00391	0,00342
11	-0,0005	0,0029	0,00122	0,00391	-0,02339	-0,00976	0,00171
12	-0,0005	0,0012	0,00037	0,00391	-0,00976	-0,00293	0,00085
13	-0,0005	0,0004	-0,00006	0,00391	-0,00293	0,00049	0,00043
14	-0,0001	0,0004	0,00015	0,00049	-0,00293	-0,00122	0,00021
15	-0,0001	0,0002	0,00005	0,00049	-0,00122	-0,00037	0,00011
16							

Después de la aproximación Nº 15, se tiene que la mejor aproximación a la solución de la ecuación es 0,00005, la cual está a menos de una milésima de solución real.

En el gráfico no se puede precisar la segunda raíz, pero sí se puede determinar que dicha raíz está entre 1 y 2, los cuales se tomarán como valores iniciales y se genera la siguiente tabla:

MÉTODO DE BISECCIÓN

e(x)= 5x^2-8x Ejecutar

Error aceptado: 0,0001

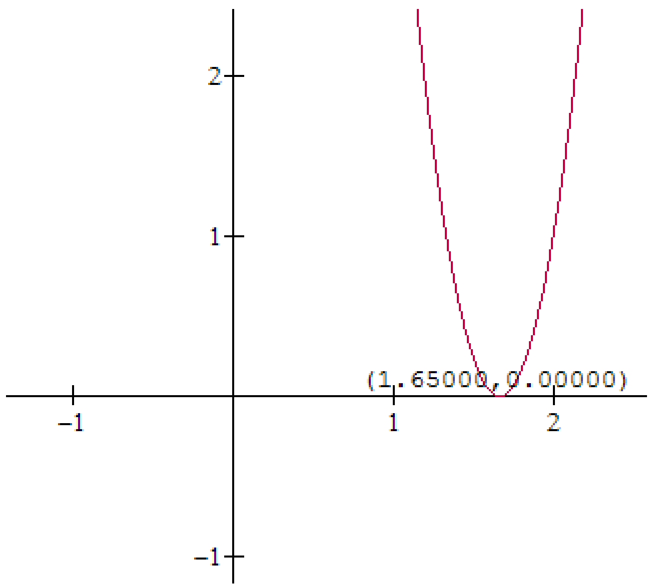
Máx. aproximaciones 15

Nº Apro-	Intervalo		Aproximación	Imagen del intervalo		Imagen de la Ap.	Error Máximo
ximación	[a ,	b]	(a+b)/2	e (a)	e (b)	e ((a+b)/2)	(b-a)/2
1	1,0000	2,0000	1,50000	-3,00000	4,00000	-0,75000	0,50000
2	1,5000	2,0000	1,75000	-0,75000	4,00000	1,31250	0,25000
3	1,5000	1,7500	1,62500	-0,75000	1,31250	0,20313	0,12500
4	1,5000	1,6250	1,56250	-0,75000	0,20313	-0,29297	0,06250
5	1,5625	1,6250	1,59375	-0,29297	0,20313	-0,04980	0,03125
6	1,5938	1,6250	1,60938	-0,04980	0,20313	0,07544	0,01563
7	1,5938	1,6094	1,60156	-0,04980	0,07544	0,01251	0,00781
8	1,5938	1,6016	1,59766	-0,04980	0,01251	-0,01872	0,00391
9	1,5977	1,6016	1,59961	-0,01872	0,01251	-0,00312	0,00195
10	1,5996	1,6016	1,60059	-0,00312	0,01251	0,00469	0,00098
11	1,5996	1,6006	1,60010	-0,00312	0,00469	0,00078	0,00049
12	1,5996	1,6001	1,59985	-0,00312	0,00078	-0,00117	0,00024
13	1,5999	1,6001	1,59998	-0,00117	0,00078	-0,00020	0,00012
14	1,6000	1,6001	1,60004	-0,00020	0,00078	0,00029	0,00006
15							

La mejor aproximación obtenida es 1,60001, la cual está a menos de una diezmilésima de la solución real.

C. Resolver la ecuación $9x^2 - 30x = -25$

Gráfica:



Numérica:

Hay que tener en cuenta los requisitos mínimos que debe cumplir la función para aplicar el método de bisección, la función anterior es siempre positiva a excepción de la raíz, por lo tanto, no se puede aplicar el método de la bisección, como lo muestra el siguiente cuadro:

		MÉTODO DE BISECCIÓN					
						Error aceptado:	0,001
	e(x)=	9x^2-30x+25				Máx. aproximaciones	15
Nº Apro-	Intervalo		Aproximación	Imagen del intervalo		Imagen de la Ap.	
ximación	[a ,	b]	(a+b)/2	e (a)	e (b)	e ((a+b)/2)	
1	0,0000	1,0000	0,50000	25,00000	4,00000	12,25000	
2							

Lo anterior resulta de un error del usuario, al tratar de aplicar el método sin verificar que se cumplan las condiciones que requiere el método de bisección. Con ejemplos como éste, conviene hacer una pausa y preguntarle a los estudiantes, qué otros tipos de ecuaciones cuadráticas no se pueden aplicar en el método de bisección.

D. Determine la altura que alcanza un cohete.

La altura h en metros que alcanza un cohete a los t segundos de haber sido lanzado desde una plataforma a 20 metros sobre el piso, está dada por la ecuación $h = -4{,}9t^2 + 147t + 20$. ¿Cuánto tiempo aproximadamente debe transcurrir para que el cohete alcance una altura de 1000 metros?

Para determinar la solución del problema, basta con resolver la ecuación $4{,}9t^2 - 147t + 980 = 0$, la cual se puede hacer mediante el programa de bisección, para ello se elige el intervalo inicial $[0,12]$.

MÉTODO DE BISECCIÓN

e(x)= 4.9x^2-147x+980

Error aceptado:	0,001
Máx. aproximaciones	20

Nº Aproximación	Intervalo [a	, b]	Aproximación (a+b)/2	Imagen del intervalo e(a)	e(b)	Imagen de la Ap. e((a+b)/2)	Error Máximo (b-a)/2
1	0,0000	12,0000	6,00000	980,0000	-78,40000	274,40000	6,00000
2	6,0000	12,0000	9,00000	274,4000	-78,40000	53,90000	3,00000
3	9,0000	12,0000	10,50000	53,90000	-78,40000	-23,27500	1,50000
4	9,0000	10,5000	9,75000	53,90000	-23,27500	12,55625	0,75000
5	9,7500	10,5000	10,12500	12,55625	-23,27500	-6,04844	0,37500
6	9,7500	10,1250	9,93750	12,55625	-6,04844	3,08164	0,18750
7	9,9375	10,1250	10,03125	3,08164	-6,04844	-1,52646	0,09375
8	9,9375	10,0313	9,98438	3,08164	-1,52646	0,76682	0,04688
9	9,9844	10,0313	10,00781	0,76682	-1,52646	-0,38251	0,02344
10	9,9844	10,0078	9,99609	0,76682	-0,38251	0,19148	0,01172
11	9,9961	10,0078	10,00195	0,19148	-0,38251	-0,09568	0,00586
12	9,9961	10,0020	9,99902	0,19148	-0,09568	0,04786	0,00293
13	9,9990	10,0020	10,00049	0,04786	-0,09568	-0,02392	0,00146
14	9,9990	10,0005	9,99976	0,04786	-0,02392	0,01196	0,00073
15							

A los 10,00012 segundos – con un en error menor o igual a 0,00073 - el cohete alcanza los 1000 metros. Se deja como ejercicio, el determinar la otra solución. Se puede asegurar que el cohete alcanza una altura de 1000 metros, entre 9,99939 y 10,00085 segundos, donde 9,99939=10,00012 - 0,00073 y 10,00085=10,00012 + 0,00073.

Otros ejemplos de ecuaciones que pueden ser desarrollados con los estudiantes son las siguientes:

a. $8x^2 + 14x - 15 = 0$

b. $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

c. $x^2 - 2\sqrt{3}\, x - 3 = 0$

d. $f(x) = \begin{cases} x - 5 & si\ x \leq 3 \\ \dfrac{x^2 - 1}{2} & si\ x > 3 \end{cases}$

CONCLUSIONES

1. Debe incrementarse los esfuerzos de todas las instancias tanto universitarias como del Ministerio de Ecuación Pública, para que se elaboren propuestas didácticas que permitan fortalecer algunos contenidos de Matemática a nivel de secundaria.

2. El docente debe procurar acciones que permitan el logro de los objetivos e ir más allá del lo establecido en el programa oficial.

3. El estudio de las ecuaciones debe ser objeto de transformaciones que permitan una mayor apropiación por parte del estudiante y no quedarse solamente en resoluciones meramente algebraicas.

3. La inserción apropiada de los métodos numéricos o del cálculo numérico en la enseñanza de la Matemática a nivel de secundaria se hace necesaria y no solamente que sea desarrollada a nivel universitario.

4. La implementación de cambio de cuadros: algebraico, gráfico y numérico, con la guía del profesor y el soporte de herramientas tecnológicas redundaría en un mejoría de la enseñanza de algunos contenidos de matemática.

5. Al considerar algunos elementos de los métodos numéricos en las clases de matemática, conlleva un uso apropiado y pertinente de la computadora en el campo educativo.

BIBLIOGRAFÍA

Artigue, Michéle; Douady, Régine; Moreno, Luis; Gómez, Pedro (Editor). 1995. Ingeniería Didáctica en educación Matemática. Iberoamérica, México.

Barahona, Manuel. 1992. Una historia dramática para la resolución de las ecuaciones de tercer y cuarto grados. Librería Francesa, San José, Costa Rica.

Barrantes, Hugo. 2003. *Introducción a la Matemática.* EUNED, San José, Costa Rica.

Burden, Richard and Faires, Douglas. 2002. *Análisis Numérico*. Thomson Learning, México.

Burden, Richard and Faires, Douglas. 2004. *Métodos Numéricos*, Thomson Learning, España.

Cabero, Julio. 2000. *Nuevas tecnologías aplicadas a la educación*, Editorial Síntesis S.A., España.

Cabero, Julio. 2001. *Tecnología educativa Diseño y utilización de medios en la enseñanza*, Editorial Paidós Ibérica, España, 2001.

Castro, Anabelle; Roldán, Gabriela. 1988. *La enseñanza de las Matemáticas y la Computación, una propuse conjunta.* Memoria del Seminario de Graduación para optar al título de Licenciadas. Escuela de Matemática. Universidad de Costa Rica.

Chevallard, Ives. 2000. *La transposición didáctica*, AIQUE, Argentina.

Espeleta, Annia. 2002. *La enseñanza de la Estadística: Una propuesta metodológica*. Sistema de Estudios de Postgrado. Maestría Profesional en Planificación Curricular. Universidad de Costa Rica, San José, Costa Rica.

Espinoza, José Luis. 2004. *Usos didácticos de la hoja electrónica Excel.* Revista Virtual Matemática Educación e Internet. Volumen 5, número 2, 2004.
[Consultado: Mayo 20, 2007, 22:30 horas.]
http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/paginasgenerales/indexv5n22004.htm

Espinoza, José Luis; Mora Walter, 2005. *Introducción a la Programación en Visual Basic para Excel,* Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Lutaif, Barbara; Zardo, Leila. 2004. *Equações e Inequações: uma abordagem a partir da utilização de duas ferramentas tecnológicas*.
[Consultado: Noviembre 16, 2007, 15:27 horas]
http://www.abed.org.br/congresso2004/por/pdf/135-TC-D2.pdf

Murillo, Manuel; Soto, Alberto; Araya, José. 2003. *Matemática Básica con Aplicaciones*, EUNED, Costa Rica.

Nuñez, Feliz. 2007. *La Enseñanza y el aprendizaje de la Estadística en la secundaria: situación actual, aproximación metodológica*. Sistema de Estudios de Postgrado. Maestría en Matemática Educativa. Universidad de Costa Rica, San José, Costa Rica.

Rasúa, Mirelis. 2003. *Microsoft Excel en la solución de problemas de álgebra lineal.* Revista Pedagogía Universitaria. Vol. 8 No. 3. Cuba.
[Consultada: Octubre 05, 2007, 21:15 horas.]
http://revistas.mes.ed.cu/Pedagogía-Universitaria/articulos/ 2003/
3/189403303.pdf/view

Ruiz, Luisa. 1998. *La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico*. Servicio de Publicaciones, Universidad de Jaén, España.

Sanabria, Geovany. 2006. *Las funciones trigonométricas con el método de exhaución de Arquímedes: dos propuestas metodológicas*. Sistema de Estudios de Postgrado. Maestría en Matemática Educativa. Universidad de Costa Rica. San José, Costa Rica.

Vergnaud, Gérard. 1990. *La Théorie des Champs Conceptuels,* Recherches en Didáctique des Mathématiques, Vol. 10,nº 2, 3, pp. 133-170.

Wendlandt, Francisco. *Apoyo didáctico - constructivo para la enseñanza de los métodos numéricos.* Instituto Tecnológico de Hermosillo. México.
[Consultado: Enero 25, 2008, 21:27 horas]
http://semana.mat.uson.mx/Memorias XIII/Wendlandt Hurtado.pdf

- Título
- Autor(s)
- Institución
- Correo electrónico
- Resumen (a espacio sencillo y no sobrepasar las 50 palabras)
- Palabras claves
- Objetivos (si procede)
- Introducción
- Marco teórico
- Marco metodológico (si procede)
- Resultados
- Conclusiones
- Recomendaciones
- Referencias bibliograficas
- Tipo de letra: arial 11
- Espacio y medio entre líneas
- 2,5 cm de márgenes
- Enviar dos archivos, uno en formato word y el otro pdf.